Aufgabe vom Mo, 4.4.16

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 2$

1) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$

$f''(x) = 12x^2 + 12x$

$f'''(x) = 24x + 12$

1) Ableitungen
2) Extremstellen (H/T)
3) Wendepunkte (W)
4) Skizze im Intervall $[-2;1,5]$
5) Tangente an f im Punkt $P(1 \mid f(1))$

Tipp zu 2) $f'(0,5) = 0$
Tipp zu 4) $f(-1,72 \mid 0)$ $f(1,11 \mid 0)$

6) Skizziere die Ableitungsfunktion $f'(x)$ in die Skizze des Graphen von $f(x)$

2) Extremstellen haben eine waagerechte Tangente d.h.
notw. Bed: $f'(x) \overset{!}{=} 0$
$\Rightarrow 4x^3 + 6x^2 - 2 = 0$

da $f'(0,5) = 0 \Rightarrow$ Polyn.div. möglich mit

$$(4x^3 + 6x^2 \ldots\ldots - 2) : (x - 0,5) = 4x^2 + 8x + 4$$
$$-(4x^3 - 2x^2)$$
$$+8x^2$$
$$-(8x^2 - 4x)$$
$$+4x - 2$$
$$-(4x - 2)$$
$$0$$ ✓

$\Downarrow$
$x_1 = 0,5$

$\Downarrow$
$4(x^2 + 2x + 1) \overset{!}{=} 0$
$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 = 0$
$\Downarrow$
$x_{2,3} = -1$
(doppelte Nullstelle der Ableitung)

mögliche Kandidaten für Extremstellen sind also $x_1 = 0,5$ und $x_{2,3} = -1$
Überprüfung durch Klärung der hinreichenden Bedingung d.h. $f''(x) \neq 0$ d.h.

$f''(0,5) = 12 \cdot 0,5^2 + 12 \cdot 0,5 = 3 + 6 = 9 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0,5 \mid -2,69)$
$f(0,5) = -2,69$

$f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) = 0$

d.h. hinr. Bed. für Extremstelle $f''(x) \neq 0$ ist nicht erfüllt $\Rightarrow$ Hier muss es sich wohl um einen Sattelpunkt (siehe 3) Wendepunkt) handeln, denn die notw. Bedingung für einen Wendepunkt $f''(-1) = 0$ ist erfüllt und die hinr. Bedingung $f'''(-1) = 24(-1) + 12 = -12 \neq 0$ ist ebenso erfüllt $\Rightarrow W(-1 \mid -1)$

3) Wendestellen

notw. Bed. $f''(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 12x^2 + 12x = 0$

$\Leftrightarrow 12x(x+1) = 0$ Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren Null ist

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1$

Kandidaten für mögliche Wendestellen sind nun $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$

Zur Überprüfung muss die hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$ in beiden Fällen geklärt werden.

$\Rightarrow$ hinr. Bed. • $f'''(0) = 24 \cdot 0 + 12 = 12 \neq 0$ ✓ $\Rightarrow W_1(0|-2)$ mit $f(0) = -2$

• $f'''(-1) = 24 \cdot (-1) + 12 = -12 \neq 0$ ✓ $\Rightarrow W_2(-1|-1)$ mit $f(-1) = -1$

wie bereits in Aufgabe 2) angedeutet bzw. gezeigt

bei $W_2(-1|-1)$ handelt es sich um einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente, also einen Sattelpunkt.

4) Zeichnung der markanten Punkte wie Nullstellen, Extremstellen (hier nur der Tiefpunkt) und die beiden Wendepunkte. Das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ sollte in der Skizze auch ersichtlich sein.

5) Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(1|f(1))$ also $P(1|-1)$

da $f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 - 2 = -1$

Tangentenfunktion Buch S. 50 $t(x) = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$

$\Rightarrow t(x) = 8 \cdot (x-1) + (-1)$

$= 8x - 8 - 1$

$= 8x - 9$ Tangente an $f(x)$ im Punkt P

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 2$
$= 4 + 6 - 2$
$= 8$

6) Erst einmal überlegt man sich, wo ist die Funktion $f(x)$ steigend, wo fallend

Dann trägt man markante Punkte ein

Tiefp./Hoch. von f → Ableitung f' hat Nullstelle

Sattelpunkt von f → Ableitung f' berührt x-Achse

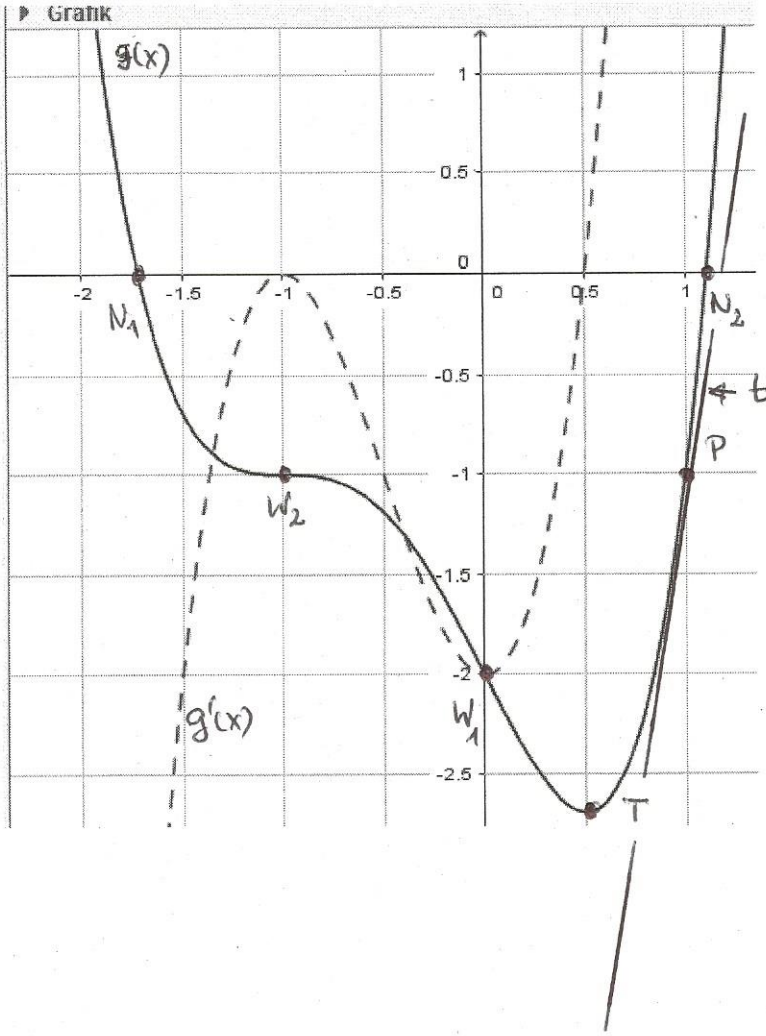
Wendepunkte von f → Ableitung hat Extrempunkte

Algebra

Funktion

- $g(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 2$
- $g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$
  ↳ (gestrichelt)

Grafik



Skizze zu 4), 5) und 6)